COMPUTER MODELS FOR THE STUDY OF PYRAMIDS WITH EQUAL EDGES INSCRIBED IN A SPHERE

Toni Chehlarova, Georgi Gachev

Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences

Resume This paper provides educational resources for the study of pyramids with equal edges that are inscribed in a sphere. Potential use of the resources by students of different age groups is illustrated. A recommendation is made to use the created computer models both for obtaining the answer to a given task with sufficient accuracy and learning the software capabilities. The possibilities for the simultaneous development of mathematical and digital competence with a focus on solving applied tasks or forming the ability to formulate hypotheses are discussed.

Keywords: *computer model, pyramid, research approach, GeoGebra, critical thinking, education*

2020 Mathematics Subject Classification: 97Gxx, 97Uxx

КОМПЮТЪРНИ МОДЕЛИ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ НА ПИРАМИДИ С РАВНИ РЪБОВЕ, ВПИСАНИ В СФЕРА

Тони Чехларова, Георги Гачев

Институт по математика и информатика
Българска академия на науките

Резюме Представени са образователни ресурси за изследване на пирамиди с равни ръбове, които са вписани в сфера. Описани са възможности за използването им от ученици от различни възрастови групи. Направена е препоръка за работа със създадените компютърни модели както за получаване с достатъчна точност на отговор на поставена задача, така и за усвояване на софтуера. Обсъдени са възможности за едновременното развитие на математическа и дигитална компетентност, с насоченост към решаване на приложни задачи или формиране на умение за формулиране на хипотези.

Ключови думи: *компютърен модел, пирамида, изследователски подход, GeoGebra, критично мислене, образование*

ВЪВЕДЕНИЕ

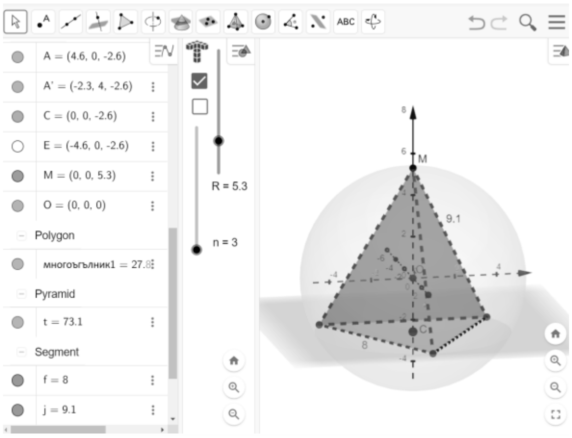
В задача в учебник по математика за 6. клас, свързана с използване на броя на ръбовете на пирамида, се използва несъществуващ обект: „За дадената пирамида (на фигура е изобразена правилна шестоъгълна пирамида) околните и основните ръбове са равни и сборът им е равен на 3.6 м. Определете дължините на ръбовете“. За извършване на изследване и формулиране на хипотези за съществуването на пирамиди с равни ръбове в [2] са представени компютърни модели, които са изработени с динамичен софтуер *GeoGebra* [5] и са предоставени във Виртуалния училищен кабинет по математика, разработван в Института по математика и информатика на Българска академия на науките [1]. Описани са и варианти на манипулативи и е обсъдена възможността за поставяне на тази изследователска задача за различни възрастови групи. Посочено е, че установяването на факта, че само три вида пирамиди могат да бъдат с равни ръбове – триъгълна, четириъгълна и петоъгълна, мотивира за продължаване на изследванията, например свързани с техни измерения.

Тук ще представим образователни ресурси за изследване на пирамиди с равни ръбове, които са вписани в сфера.

КОМПЮТЪРНИ МОДЕЛИ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ НА ПИРАМИДИТЕ С РАВНИ РЪБОВЕ, ВПИСАНИ В СФЕРА

Като имаме предвид, че учениците са установили факта, че само три вида пирамиди могат да бъдат с равни ръбове – триъгълна, четириъгълна и петоъгълна, ще разглеждаме само тези три вида пирамиди. Компютърните модели могат да се ползват на адрес http://cabinet.bg/index.php?contenttype=viewarticle&id=274 и са свързани с решаването на две задачи.

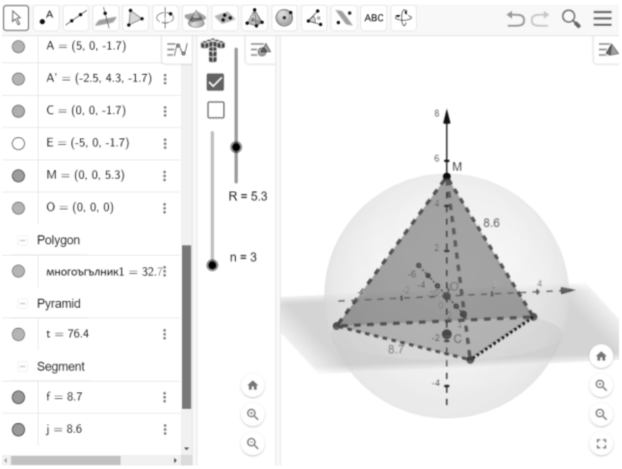
Задача 1. Намерете ръба на пирамида с равни ръбове, вписана в сфера с радиус 5,3 *cm*.



Фигура 1. Помощен файл с правилна пирамида, вписана в сфера

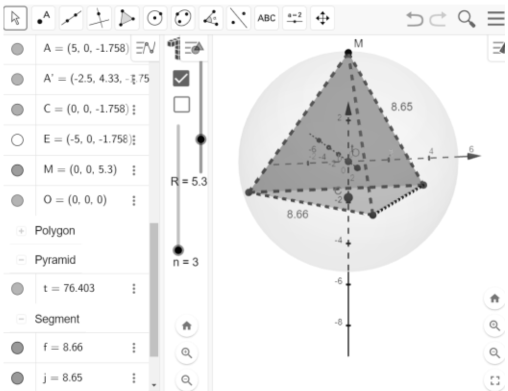
В чертожното поле на динамичния файл е изобразена правилна пирамида, вписана в сфера (фиг. 1). С плъзгача-параметър R се променя радиусът на сферата, а плъзгачътпараметър *n* се мени от 3 до 5 и определя вида на пирамидата, съответно триъгълна, четириъгълна или петоъгълна. С точката С се управлява равнината на основата.

Радиусът на сферата отговаря на условието, затова с преместване на точката С се стремим да получим равенство на ръбовете на триъгълната пирамида (фиг. 2).



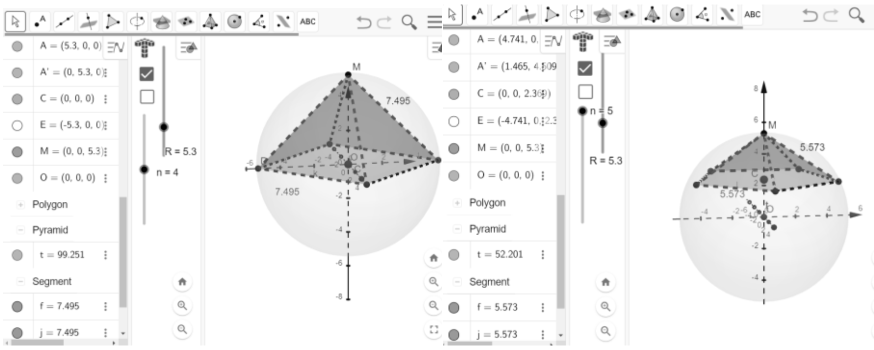
Фигура 2. Получаване на пирамида с равни ръбове

За да постигнем по-голяма точност, подходящо е да се промени точността на показване на данните (например до три знака след десетичната запетая), както и да се използва zoom за по-прецизно преместване на точката *C* (фиг. 3).



Фигура 3. Промяна на настройките за повишаване на точността на резултата

Аналогични са дейностите за намиране на дължината на ръба на четириъгълна и на петоъгълна пирамиди, вписани в същата сфера (фиг. 4).



Фигура 4. Резултати за четириъгълна и петоъгълна пирамиди

Използването на предоставения компютърен модел позволява с добра точност да се получи отговор на задачата. В конструкционния протокол на файла може да се проследи построението на конструкцията (първите стъпки може да се разгледат на фиг. 5).

	Name	Icon	Description	Value
1	Number R			R = 5.3
2	Point O		Intersection point of yAxis, zAxis	O = (0, 0, 0)
3	Point M		(0, 0, R)	M = (0, 0, 5.3)
4	Sphere a		Sphere through M with centre O	a: $x^2 + y^2 + z^2 = 28.09$
5	Point C		Point on zAxis	C = (0, 0, -1.758)
6	Line i		Line through C parallel to xAxis	i: X = (0, 0, -1.758) + λ (1, 0, 0)
7	Plane p		Plane through C perpendicular to zAxis	p: z = -1.758
8	Circle c		Intersection curve of p, a	c: X = (0, 0, -1.758) + (5 cos(t), 5 sin(t), 0)
9	Point A		Intersection point of c, i	A = (5, 0, -1.758)
9	Point E		Intersection point of c, i	E = (-5, 0, -1.758)
10	Image снимка1			снимка1
11	Number n			n = 3
12	Number α		360 / n	α = 120
13	Point A'		A rotated by angle α° about an axis perpendicular to xOyPlane and passing through O	A' = (-2.5, 4.33, -1.758)
14	Polygon многоъгълник1		Polygon(A, A', n, xOyPlane)	многоъгълник1 = 32.475

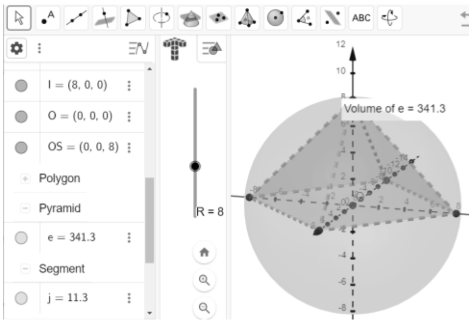
Фигура 5. Част от конструкционния протокол

При създаване на тази динамична конструкция точката *C*, с която се променя равнината на основата на пирамидата, е произволна точка от оста *Oz*. За по-лесно постигане на точен резултат за равенството на ръбовете на пирамидата, може да се въведе плъзгач-параметър и тя да се предефинира чрез координатите си.

Подходящо е да се използва този файл и за допълнителни изследвания. Например може да се направи проверка за максимален обем за всеки от трите вида правилни пирамиди, вписани в сферата, и да се формулират хипотези. Очаквано е учениците да забележат разположението на четириъгълната пирамида с равни ръбове, вписана в сфера, свързано с центъра на сферата.

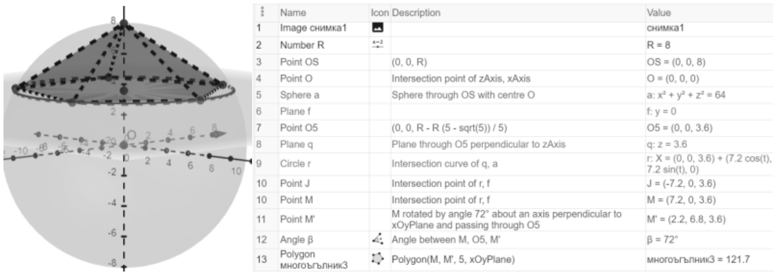
Задача 2. Намерете най-големия възможен обем на пирамида с равни ръбове, вписана в сфера с радиус 8 *cm*.

Т.к. съществуват само три вида пирамиди с равни ръбове – триъгълна, четириъгълна и петоъгълна, за решаване на задачата е достатъчно да се сравнят обемите им за конкретния случай. Към тази задача са предоставени няколко компютърни модела, всеки от които съдържа една или три пирамиди с равни ръбове, вписани в сфера. Радиусът на сферата R може да се променя с плъзгач-параметър. Обемът на всяка от пирамидите може да се изведе с бутон в чертожното поле, или да се използва стойността от алгебричния прозорец (фиг. 6).



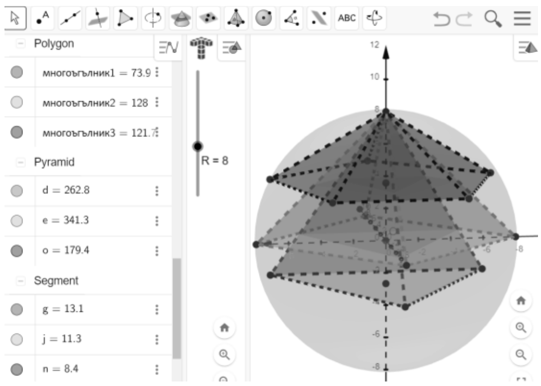
Фигура 6. Използване на бутон или алгебричния прозорец за извеждане на стойности

При построяване на моделите са използвани както команди, така и инструменти от лентата с инструменти (фиг. 7).



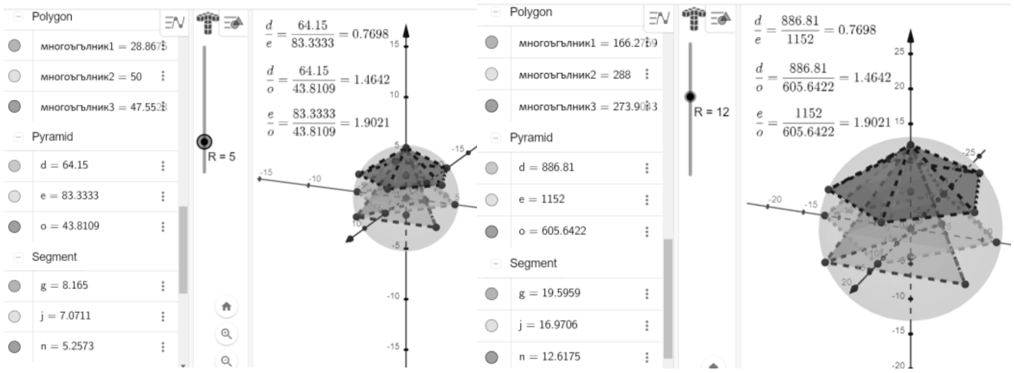
Фигура 7. Наблюдение на построението

Удобно е едновременното наблюдение на трите пирамиди за извършване на сравнения на основни измерения – дължина на ръб, лице на основа, обем на пирамида, височина на пирамида (фиг. 8).



Фигура 8. Едновременно наблюдение на трите пирамиди

Подходящо е да се изведат някои отношения и наблюдава изменението им при промяна на сферата, например отношения на обемите (фиг. 9).



Фигура 9. Наблюдение на отношения на обемите

Очаквано е запазването на отношението на обемите – трите пирамиди са вписани в една и съща сфера, а отношението на обема на съответното кълбо и вписаната в нея n-ъгълна пирамида с равни ръбове е постоянно.

Извършването на такова изследване с пирамиди е подходящо за учениците от 6. и 7. клас. Учениците, които са изучавали ирационални числа, е подходящо да продължат и с аналитично решаване на задачите. При $n = 4$ лесно се стига както до връзката между ръба b на пирамидата и радиусът R на описаната около нея сфера $b = \sqrt{2}R$, така и до формулата $V = \frac{\sqrt{2}}{6}b^3$. При $n = 3$ се получава $b = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$, съответно $R = \frac{\sqrt{6}}{4}b$, а за обема $V = \frac{\sqrt{2}}{12}b^3$. При $n = 5$ резултатите са $b = \frac{1}{5}\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}$R и $R = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}b$, а за обема съответно $V = \frac{5+\sqrt{5}}{24}b^3$. За получаването на тези резултати разгледаните динамични файлове отново са от помощ, като е подходящо да се правят и допълнителни построения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Компютърни модели могат да бъдат подходящо средство за решаване на такива задачи – както за формулиране на хипотези, така и за решаване на практически задачи с достатъчна точност. За създаването на условия за едновременното развитие на математическа и дигитална компетентност, особено с насоченост към решаване на приложни задачи или формулиране на хипотези, трябва да се полагат грижи. На различни равнища се отчитат и повишените изисквания към дигиталните компетентности на учителите и към компетентността им да организират обучение в контекста на STEM [4], [6]. Такива задачи се предлагат в онлайн състезание „VIVA Математика с компютър“ [3] и могат да се намерят в раздела за състезания на Виртуалния училищен кабинет по математика.

БЛАГОДАРНОСТ

Този материал е финансиран по Национална програма "Образование с наука" (Споразумение между Министерството на образованието и науката и Българската академия на науките Д01-172 от 18.09.2024 година).

REFERENCES

[1] T. Chehlarova, G. Gachev, P. Kenderov, E. Sendova. A Virtual School Mathematics Laboratory. *In: V-th National Conference on e-Learning. University of Ruse*, (2014). 146 – 151

[2] T. Chehlarova. Exploration Of Pyramids With Equal Edges To Overcome Misconceptionт. Online journal „Educational forum“ 9, 3, (2021), 13-18 (In Bulgarian)

[3] G. Gachev, P. Kenderov, T. Chehlarova. Tasks from Online Competition "Viva Mathematics with A Computer": A Resource for Work in STEM Centers. *Mathematics and Informatics*, (2023), 66 (6), 579-595(In Bulgarian)

[4] D. Galabova. Developing STEM competence in future teachers in mathematics in the trend of STEM education. *Mathematics and Education in Mathematics*, (2022), 51, 124-136. (In Bulgarian)

[5] J. Hohenwarter, M. Hohenwarter, Z. Lavicza. Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: the Case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, (2009), 28(2), 135 – 146.

[6] P. Petkov, S. Georgieva, E. Koleva. Mathematics in an electronic activity with Geogebra - MEGA. Mathematics and Education in Mathematics, (2021), 373-380. (In Bulgarian)

Toni Chehlarova
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Acad. Georgi Bonchev Str., Block 8
1113 Sofia, Bulgaria
toni.chehlarova@math.bas.bg

Georgi Gachev
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Acad. Georgi Bonchev Str., Block 8
1113 Sofia, Bulgaria
gachev@math.bas.bg

Тони Чехларова
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София, България
toni.chehlarova@math.bas.bg

Георги Гачев
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София, България